9. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(abzugeben am Donnerstag, 21.06.2007)

Aufgabe H24 *Konkavität der Entropie* (5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Subadditivität, daß die Entropie eine *konkave* Funktion ist, d.h.

$$S(\textstyle\sum_i \lambda_i \varrho_i) \;\geq\; \displaystyle\sum_i \lambda_i\, S(\varrho_i) \qquad \text{mit} \qquad \lambda_i \in [0,1] \quad \text{und} \quad \textstyle\sum_i \lambda_i = 1\;.$$

Hinweise: Koppeln Sie jeden Mischungsanteil ϱ_i des Systems (A) an einen reinen Zustand $|e_i\rangle$ eines Hilfssystems (B), wobei $\{|e_i\rangle\}$ eine vollständige Orthonormalbasis von B sei, so daß

$$\varrho_{AB} \;=\; \sum_i \lambda_i\, \varrho_i \otimes |e_i\rangle\langle e_i|\;.$$

Wenden Sie Subadditivität auf ϱ_{AB} an. Es gilt (wieso?)

$$\mathrm{tr}\Big(\Big\{\textstyle\sum_i \varrho_i \otimes |e_i\rangle\langle e_i|\Big\} \ln\Big\{\textstyle\sum_j \varrho_j \otimes |e_j\rangle\langle e_j|\Big\}\Big) \;=\; \mathrm{tr}\Big(\textstyle\sum_i \varrho_i \otimes |e_i\rangle\langle e_i| \ln(\varrho_i \otimes |e_i\rangle\langle e_i|)\Big)\;.$$

Benutzen Sie ferner

$$\ln(\varrho_A \otimes \varrho_B) \;=\; \ln \varrho_A \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes \ln \varrho_B\;.$$

Aufgabe H25 *WKB-Näherung und Energie-Niveaus* (5 Punkte)

Die Energieniveaus E_n des diskreten Spektrums eines Teilchens mit Masse m im Potential V sind durch die Anschlußbedingungen an den Umkehrpunkten a und b der klassischen Bewegung gemäß der Quantisierungsregel

$$\int_a^b \mathrm{d}x \sqrt{2m(E_n - V(x))} \;=\; \hbar(n+\tfrac{1}{2})\pi$$

festgelegt, wobei n nichtnegativ und ganzzahlig ist.

a) Sei $V(x) = V_0 \cdot (|x|/l)^\lambda$. Geben Sie die Potenz κ in $E_n \sim (n+\frac{1}{2})^\kappa$ an, und skizzieren Sie das Potential sowie die Energieniveaus für $\lambda = 1, 2, 4$.

b) Sei nun $\lambda = 2$ und $V_0 = \frac{m}{2}\omega^2 l^2$, d.h. der harmonische Oszillator. Was genau liefert in diesen Fall die Quantisierungsregel für die Eigenwerte E_n? Hätten Sie das Ergebnis erwarten dürfen?

c) Betrachten Sie nun ein Kastenpotential mit der Breite $2l$, d.h. $\lambda \to \infty$. Was erhalten Sie für E_n? Warum konnten Sie nicht damit rechnen, die exakte Lösung zu finden?

b.w.

Aufgabe H26 *Pfadintegral für den harmonischen Oszillator* (5 Punkte)

Der unitäre Zeitentwicklungsoperator für den eindimensionalen harmonischen Oszillator, also $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, ist im Pfadintegralformalismus gegeben durch

$$U(x_f, t_f; x_i, t_i) \;=\; \lim_{N\to\infty} \int \Big(\prod_{\ell=1}^{N-1} \mathrm{d}x_\ell\Big) \Big(\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar\Delta t}\Big)^{\frac{N}{2}} \, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S[x]} \;,$$

mit der Wirkung

$$S[x] \;=\; \Delta t \sum_{k=1}^{N} \frac{m}{2} \left\{ \Big(\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}\Big)^2 \;-\; \omega^2 x_k^2 \right\} \;.$$

a) Bestätigen Sie, daß das Extremum von $S[x]$ dem klassischen Pfad entspricht, indem Sie zeigen, daß das Verschwinden der Variation der Wirkung, d.h. $\partial S[x]/\partial x_j = 0$, zusammen mit $\Delta t \to 0$ auf die klassische Bewegungsgleichung führt.

b) Die Lösung dieser Bewegungsgleichung mit den Randbedingungen $x(t_{i,f}) = x_{i,f}$ nennen wir $x_{\mathrm{kl}}(t)$, ohne sie hinzuschreiben. Führen Sie eine neue Integrationsvariable $\eta(t) = x(t) - x_{\mathrm{kl}}(t)$ ein und entwickeln Sie damit die Wirkung $S[x]$ um den klassischen Weg. Zeigen Sie, daß dies auf folgende Exponentialfunktion einer quadratischen Form führt:

$$U(x_f, t_f; x_i, t_i) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S[x_{\mathrm{kl}}]} \lim_{N\to\infty} \Big(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar\Delta t}\Big)^{\frac{N}{2}} \Big(\frac{2\pi\Delta t}{m}\Big)^{\frac{N-1}{2}} \int \Big(\prod_{\ell=1}^{N-1} \mathrm{d}\eta_\ell\Big) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\eta^T B\,\eta} \;,$$

wobei η^T für das $(N-1)$-Tupel $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{N-1})$ steht. Geben Sie die Matrix B an.

Anmerkung: Die Determinante von B kann mit einigen weiteren Schritten berechnet werden, damit auch das Integral in U, und man findet schließlich die explizite Lösung für U – dies ist nicht mehr Teil der Aufgabe!